Cours de Mécanique du point matériel

SMPC1

Module 1 : Mécanique 1

Session : Automne 2014

Prof. M. EL BAZ

Chapitre 1: Rappels et compléments mathématiques

I - Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

Les grandeurs physiques peuvent être de nature scalaire ou vectorielle.

I.1) - Grandeurs scalaires

Pour spécifier une grandeur scalaire il suffit de préciser un nombre (et le plus souvent une unité).

Exemple:

La température, la pression en un point, le potentiel électrique, la masse…

I.2) - Grandeurs vectorielles

Pour spécifier une grandeur vectorielle il faut en plus d'un scalaire représentant l'intensité de la grandeur, préciser la direction, le sens, et le plus souvent en physique, le point d'application de la grandeur vectorielle.

Un vecteur est ainsi caractériser par:
A : Son point d'application, c'est l'origine du vecteur.
$|\vec{V}| = |AB|$: Le module du vecteur.
(D) : La direction du vecteur.
Le sens du vecteur est indiqué par la flèche pointant de l'origine (point A) vers l'extrémité (point B).

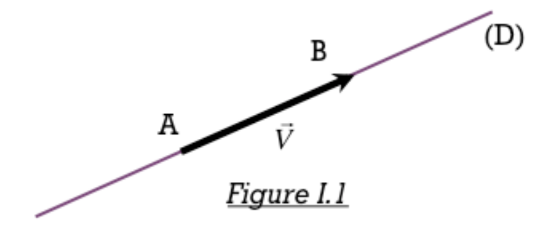


Figure I.1

Exemple :

La vitesse, la force, le champ électrique…

Vecteur unitaire :

Un vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1.

II – Opérations sur les vecteurs

II.1) - Addition de vecteurs

Géométriquement (voir figure II.1), l'addition de deux vecteurs est effectuée en confondant l'origine du deuxième sur l'extrémité du premier. Le vecteur ayant pour origine l'origine du premier vecteur et comme extrémité, l'extrémité du deuxième défini la somme des deux vecteurs.

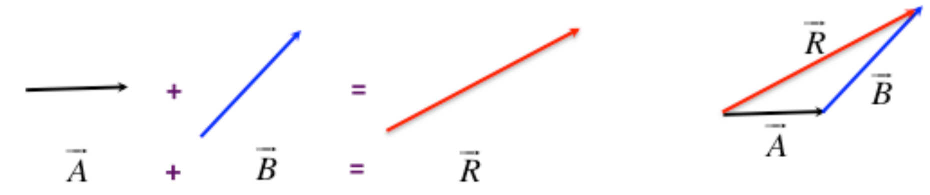


Figure II.1

La méthode peut être généralisé pour l'addition de plus de deux vecteurs (voir figure II.2):

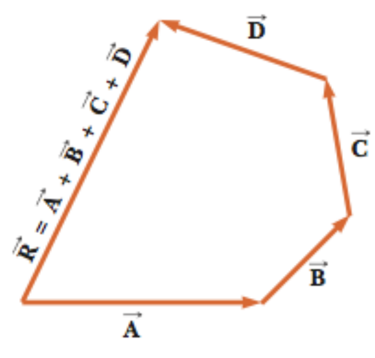


Figure II.2

II.2) - Multiplication par un scalaire

Soit λ un scalaire; le vecteur $\lambda\vec{V}$ est un vecteur ayant la même direction que le vecteur $\vec{V}$, de module $|\lambda||\vec{V}|$ et dont le sens est celui de $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ et opposé au sens de $\vec{V}$ si $\lambda < 0$

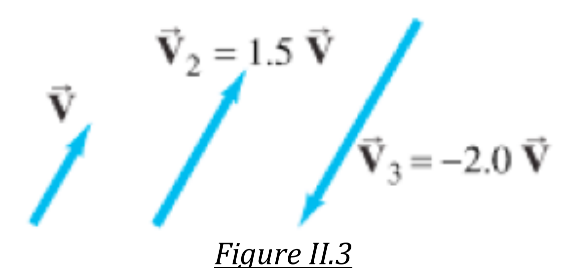


Figure II.3

II.3) - Composantes d'un vecteur

Dans plusieurs situations physiques il est important d'utiliser un repère comme système de référence. Le repère *R(O; X,Y,Z)* est constitué d'un point d'origine *O*, et d'un système de trois axes (OX), (OY) et (OZ) définissant les trois dimensions de l'espace. On associe une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, à ce repère. C'est une base constituée de vecteurs qui sont orthogonaux entre eux et unitaires.

$\vec{\imath}$: Vecteur unitaire de l'axe (OX).
$\vec{\jmath}$: Vecteur unitaire de l'axe (OY).
$\vec{k}$: Vecteur unitaire de l'axe (OZ).

Les composantes, *(x,y,z)*, d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ sont les projections orthogonales du vecteur position sur les trois axes du repère. Dans ce cas le vecteur position s'écrit :

$$\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}$$

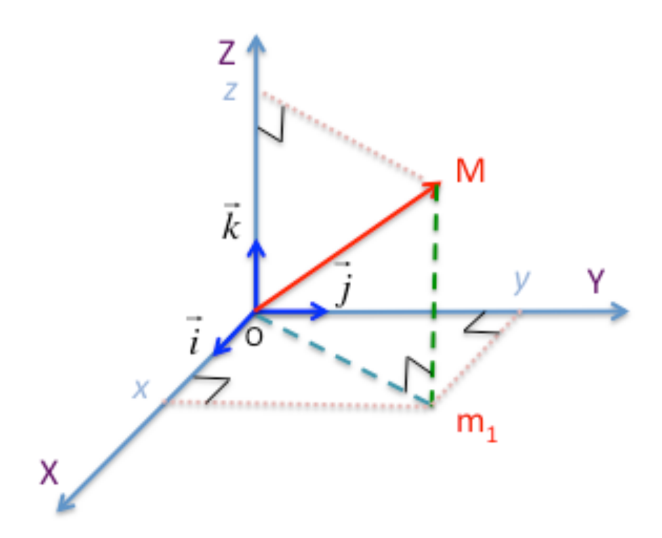


Figure II.4

II.4) - Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ sont égaux si leurs composantes sont égales une à une ; *c.à.d.* $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.

II.5) - Produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, faisant un angle θ entre eux $0 \leq \theta \leq \pi$.

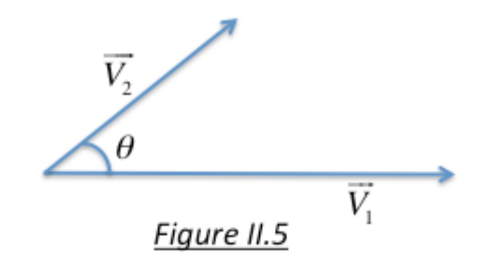


Figure II.5

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le scalaire défini par :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = |\vec{V}_1||\vec{V}_2|\cos\theta$$

Le produit scalaire peut être aussi exprimé en termes des composantes des vecteurs :

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Propriétés :

- En comparant les deux expressions du produit scalaire, on peut obtenir une expression de l'angle θ en fonction des coordonnées des deux vecteurs :
$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}$$
- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux ($\theta = \frac{\pi}{2}$) est nul :
$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2.$$
- le produit scalaire permet de définir le module d'un vecteur $\vec{V}$:
$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V}.\vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

II.6) – Produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$, faisant un angle θ entre eux. Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur noté $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et caractérisé par :

- Module : $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1||\vec{V}_2| \sin\theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$.
- Direction : la direction du vecteur $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Sens : Le sens du vecteur $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V})$ est direct.

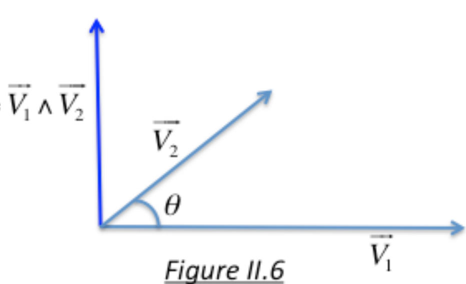


Figure II.6

En terme des composantes des vecteurs, le produit vectoriel est exprimé de la façon suivante :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction ($\theta = 0$) ou l'un des vecteurs est nul.
- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique) : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$.
- Interprétation géométrique du produit vectoriel :
  Le module, $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$, du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ représente la surface du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

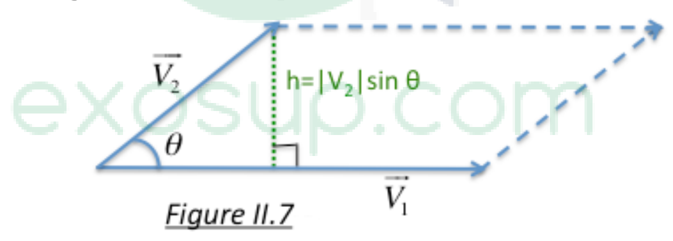


Figure II.7

II.7) - Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$. La dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ; *c.à.d.* $\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$.

Propriétés :

- Linéarité : $\frac{d(\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2)}{dt} = \alpha\frac{d\vec{V}_1}{dt} + \beta\frac{d\vec{V}_2}{dt}$.
- Dérivée d'un produit scalaire : $\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\frac{d\vec{V}_2}{dt}$.

- Dérivée d'un produit vectoriel : $\frac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$.
- Dérivée du produit d'un vecteur par une fonction scalaire : $\frac{d(f\vec{V}\ )}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{V} \ + f\frac{d\vec{V}}{dt}$
- On peut aussi montrer qu'un vecteur de module fixe : $|\vec{V}| = V = Constante$, est orthogonal à sa dérivée ; $\vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$.

Preuve :

$$\frac{d(\vec{V}^2)}{dt} = \frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = 2\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

D'autre part on a :

$$\frac{d(\vec{V}^2)}{dt} = \frac{d(V^2)}{dt} = 2V\frac{dV}{dt} = 0$$

la dernière égalité vient du faut que le module est constant donc sa dérivée est nul.

En comparant les deux lignes, on trouve que $\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$, ce qui implique que les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\frac{d\vec{V}}{dt}$ sont orthogonaux.

III - Différentielle

III.1) - Différentielle d'une fonction scalaire.

III.1.1) Dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables :

Soit la fonction *f(x,y,z)* dépendant de trois variables.
La dérivée partielle de *f(x,y,z)* par rapport à l'une des variables est obtenue en calculant la dérivée en considérant les deux autres variables constantes. Ainsi :

- la dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est obtenue en dérivant par rapport à x et en considérant y et z comme des constantes.
- la dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est obtenue en dérivant par rapport à y et en considérant x et z comme des constantes.
- la dérivée partielle de f par rapport à z, notée $\frac{\partial f}{\partial z}$ est obtenue en dérivant par rapport à z et en considérant x et y comme des constantes.

Exemple :

$$f(x,y,z) = xy^2 + \cos z \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -\sin z \end{cases}$$

III.1.2) Différentielle totale :

La différentielle du champ scalaire *f(x,y,z)* est définie par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Géométriquement, elle représente la variation de la fonction f d'un point *M(x,y,z)* à un point infiniment voisin *M'(x+dx, y+dy, z+dz)*.

Exemple :

$$f(x,y,z) = xy^2 + \cos z \Longrightarrow df = y^2 dx + 2xydy - \sin z\, dz$$

III.2) - Différentielle d'une fonction vectorielle

La différentielle d'un champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z)$ est défini par :

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}dz.$$

Géométriquement cela représente la variation du champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = \overrightarrow{OM}$, quand le point matériel se déplace du point $M(x,y,z)$ au point voisin $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, c.à.d. sa variation $\overrightarrow{MM'}$.

IV - Opérateurs différentiels

IV.1) – Gradient

IV.1.1) Définition

Soit $f(x,y,z)$ une fonction continue et dérivable. Le vecteur gradient de la fonction scalaire $f(x,y,z)$ est le vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ (*nabla*) défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ceci permet d'écrire le gradient d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$$

IV.1.2) Relation entre le gradient et la différentielle totale :

En utilisant les définitions données auparavant, on peut établir la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f . d\overrightarrow{OM} = \text{d}f.$$

Cette relation permet de donner une interprétation géométrique à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. En effet, sur une surface de niveau (S) d'une fonction $f(x,y,z)$, définie par $f(x,y,z) = Cte$, la variation de $f(x,y,z)$ est nulle, c.à.d. $df = 0$, ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f . d\overrightarrow{OM} = 0.$$

Ceci permet de montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est perpendiculaire à tout déplacement élémentaire sur la surface de niveau. En d'autres termes, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est perpendiculaire à la surface de niveau $f(x,y,z) = Cte$ en tout point $M(x,y,z)$.

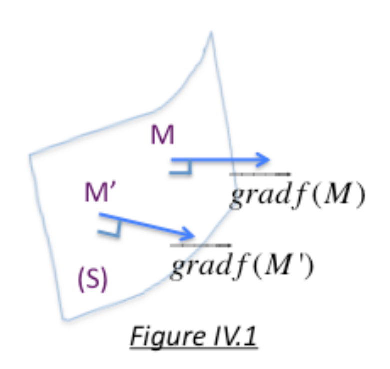


Figure IV.1

IV.2) – Divergence

L'opérateur nabla définit précédemment permet de définir aussi la divergence d'un vecteur d'un vecteur :

$$\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$$

Ainsi, la divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ est donnée par :

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

IV.3) Rotationnel

Soit $\vec{V}(M)$ un champ vectoriel ayant pour composantes au point *M(x,y,z)*:

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Le rotationnel du vecteur $\vec{V}(M)$ est un vecteur définit en utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}(M)$$

Les composantes de ce vecteur sont donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Propriété :

Si le vecteur $\vec{V}$ peut être écrit comme le gradient d'une fonction *f(x,y,z)* donnée, alors on peut montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$. En effet, quelque soit la fonction *f(x,y,z)* (en tenant compte des conditions de dérivabilité) on peut montrer que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{0}$$

Ce qui montre que le rotationnel d'un vecteur gradient est toujours nul. Cette propriété peut être utilisé pour montrer qu'un certain champ vectoriel dérive d'un gradient. En effet, il suffit alors de montrer que le rotationnel de ce champ vectoriel est nul $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M) = \vec{0}$.

V - Systèmes de coordonnées

V.1) – Coordonnées Cartésiennes

V.1.1) Définitions

Soit le repère fixe orthonormé directe *R(O;X,Y,Z)* de base orthonormé directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. La position d'un point *M* peut être repérer par ses trois composantes cartésiennes (x, y, z), projection orthogonales sur les trois axes du repère :

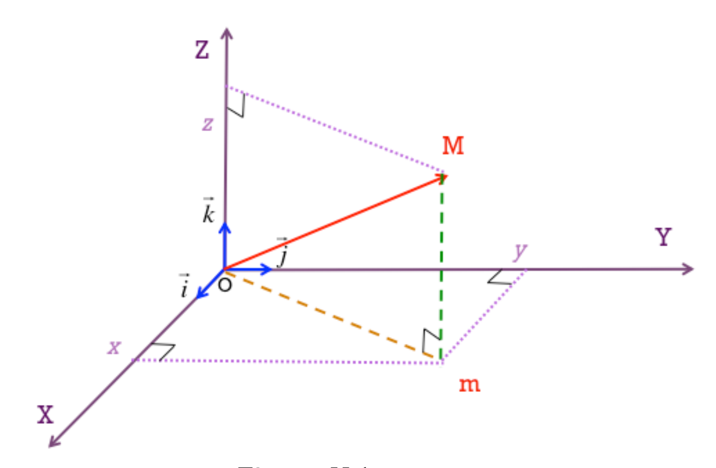


Figure V.1

Le vecteur position s'écrit alors: $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}$.

V.1.2) Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

Le déplacement élémentaire du point *M(x,y,z)* en un point infiniment voisin *M'(x+dx, y+dy, z+dz)* engendre un déplacement vectoriel $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$:

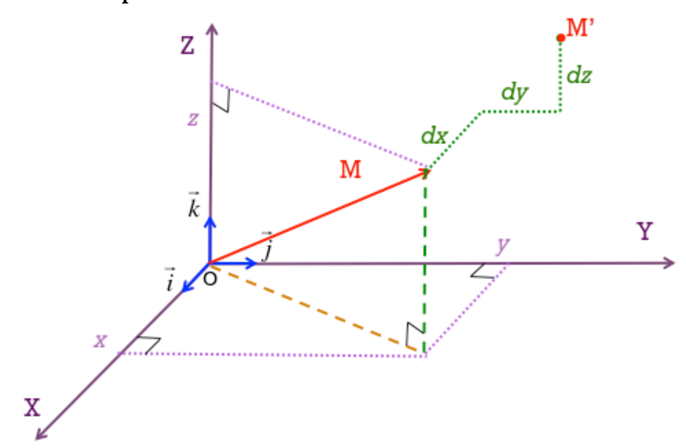


Figure V.2

Ce déplacement élémentaire n'est autre que la différentielle du vecteur position :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}}$$

V.1.3) Élément de volume en coordonnées cartésiennes:

Le volume définit par les déplacement élémentaire est appelé élément de volume ou encore volume élémentaire. En coordonnées cartésienne le volume élémentaire est un cube de cote *dx*, *dy* et *dz* :

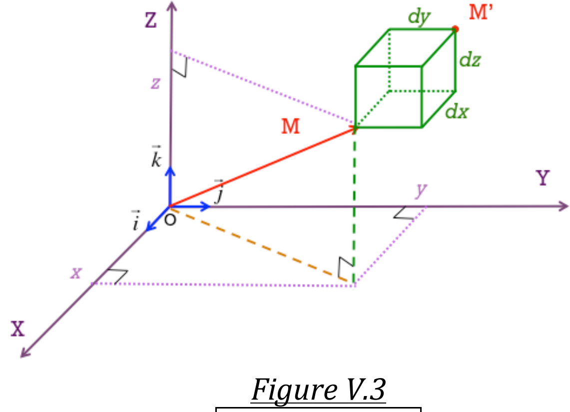
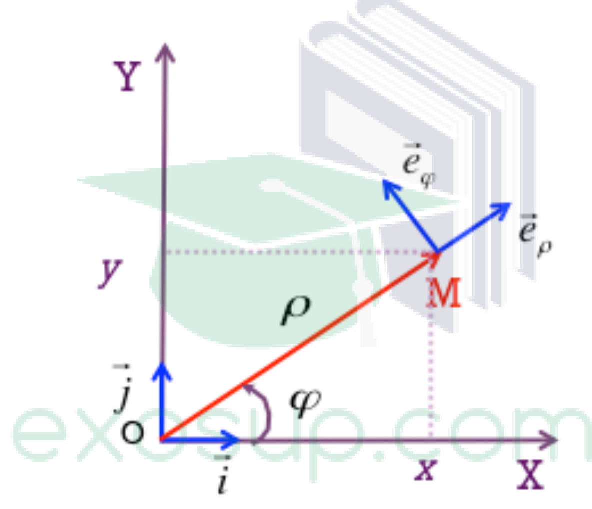


Figure V.3

$$\boxed{dV = dx\,dy\,dz}$$

V.2) Coordonnées Polaires

C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point M à deux dimensions. Ainsi, la position du point M, est repérée par la donnée de la distance ρ, qui



le sépare de l'origine O et de l'angle φ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OX)*.

Figure V.4

On a donc

$$\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right| \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq +\infty$$

$$\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{\imath}}\right) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

En utilisant le schéma dans la figure V.4 on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

On définit la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ associées aux coordonnées polaires. Le vecteur $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{OM}$, et le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est le vecteur ***directement*** perpendiculaire à $\vec{e}_\rho$. Cette base est relié à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi \ \vec{\imath} + \sin\varphi \ \vec{\jmath} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \ \vec{\imath} + \cos\varphi \ \vec{\jmath} \end{cases}$$

Le vecteur position en coordonnées polaires s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho}$$

V.3) – Coordonnées Cylindriques

V.3.1) Définitions

Il est possible de repérer la position, dans l'espace, d'un point M en utilisant le système de coordonnées cylindriques. Dans ce système la position du point est repérée par la donnée de la composante z (comme dans les coordonnées cartésiennes) et de ses coordonnées polaires qui permettent de repérer la position de la projection orthogonale du point M sur le plan horizontale.

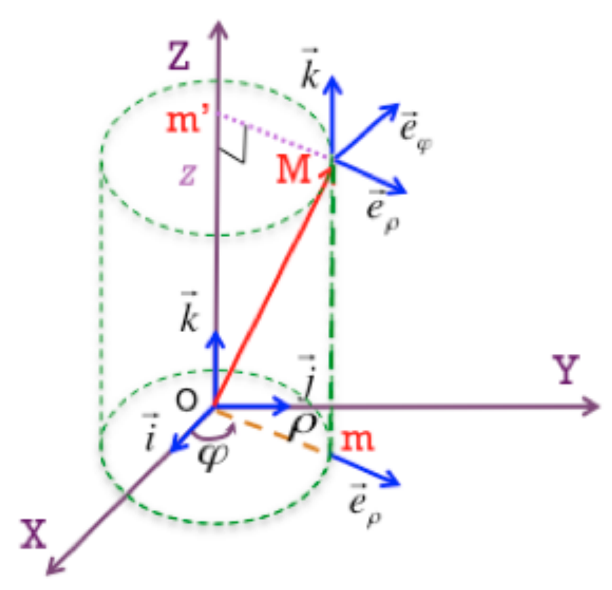


Figure V.5

On a donc d'après le paragraphe précédent :

$$\rho = \left|\overrightarrow{Om}\right| \quad ; \quad 0 \leq \rho < +\infty$$

$$\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Om}, \vec{\imath}}\right) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$z = \overline{Om'} \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$$

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

ou inversement :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

On associe la base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ aux coordonnées cylindriques, où le vecteur $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{Om}$, et le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ soit directe.

Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\ \vec{\imath} + \sin\varphi\ \vec{\jmath} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \vec{\imath} + \cos\varphi\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Dans cette base le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}}$$

V.3.2) Déplacement élémentaire en coordonnées Cylindriques

Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = d\rho\ \vec{e}_\rho + \rho d\varphi\ \vec{e}_\varphi + dz\ \vec{k}}$$

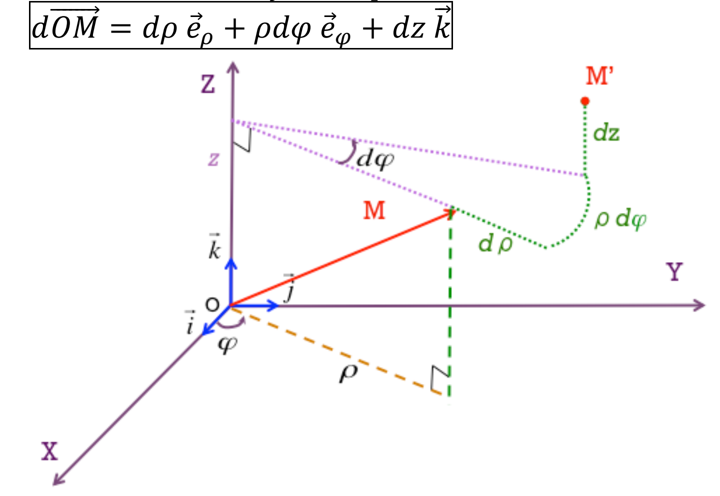


Figure V.6

En effet, le déplacement de M vers M' s'effectue en faisant une translation $d\rho$ suivant $\vec{e}_\rho$, suivi d'une rotation d'un angle $d\varphi$, qui donne lieu à un déplacement de $\rho d\varphi$, puis une translation dz suivant $\vec{k}$.

V.3.3) Élément de volume en coordonnées Cylindriques

Le volume élémentaire engendré par le déplacement élémentaire, décrit ci-dessus, est

$$\boxed{dV = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz}$$

comme indiqué dans la figure suivante :

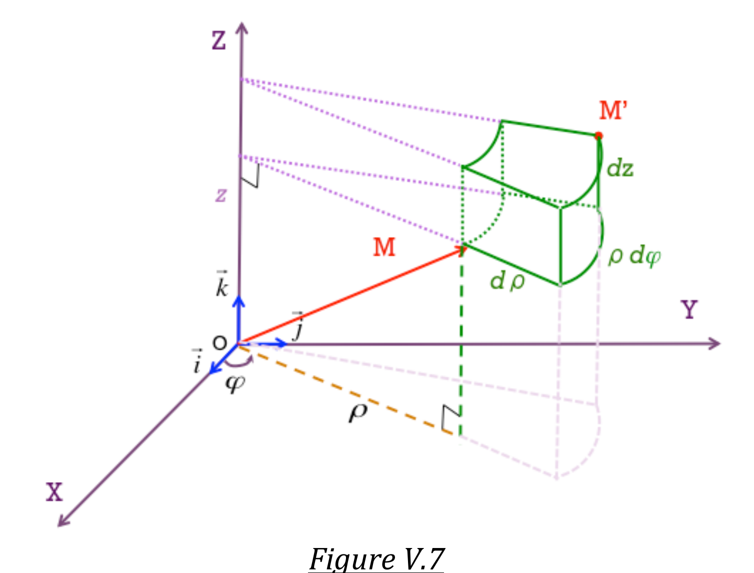


Figure V.7

V.4) - Coordonnées Sphériques

V.4.1) Définitions

Dans l'espace à trois dimensions on peut utiliser le système des coordonnées sphériques, dont la base associée est une base mobile. Ce système de coordonnées est adéquat dans les cas où le système étudié présente un point particulier O, de symétrie autour duquel les rotations sont privilégiées.

La position du point matériel est alors repéré par la distance r et deux angles φ et θ. r étant la distance qui sépare le point matériel M du point particulier O (l'origine). L'angle φ appelé *longitude* ou *azimut* est l'angle que fait la projection du vecteur position sur le plan horizontal avec l'axe *(OX)* (similaire au cas du système de coordonnées cylindriques). L'angle θ, appelé *colatitude*, est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OZ)*.

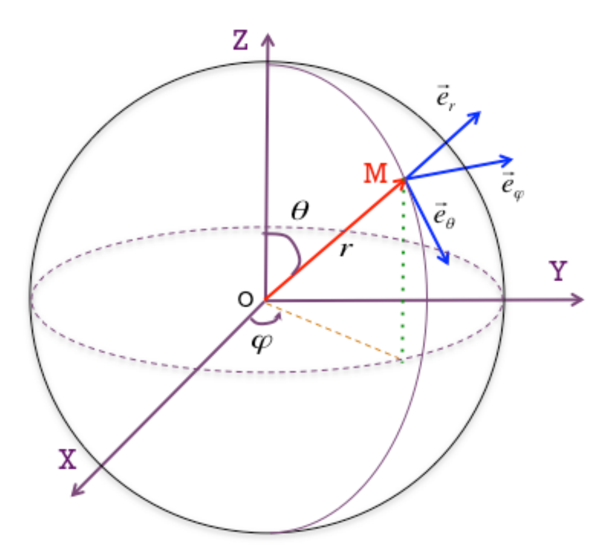


Figure V.8

On a donc :

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \quad ; \quad 0 \leq r < +\infty$$

$$\varphi = \left(\overrightarrow{Om}, \vec{\imath}\right) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{k}\right) \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ces relations peuvent être inversées, pour exprimer les coordonnées sphériques en termes des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

La base orthonormée associées aux coordonnées cylindriques est notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$. $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$ dans le plan *(OZ, OM)*. Le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit directe.
Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \vec{\imath} + \cos\varphi\ \vec{\jmath} \end{cases}$$

Dans cette base, le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r}$$

V.4.2) Déplacement élémentaire en coordonnées Sphériques

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphérique s'écrit :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\ \vec{e}_r + rd\theta\ \vec{e}_\theta + r\sin\theta\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi}$$

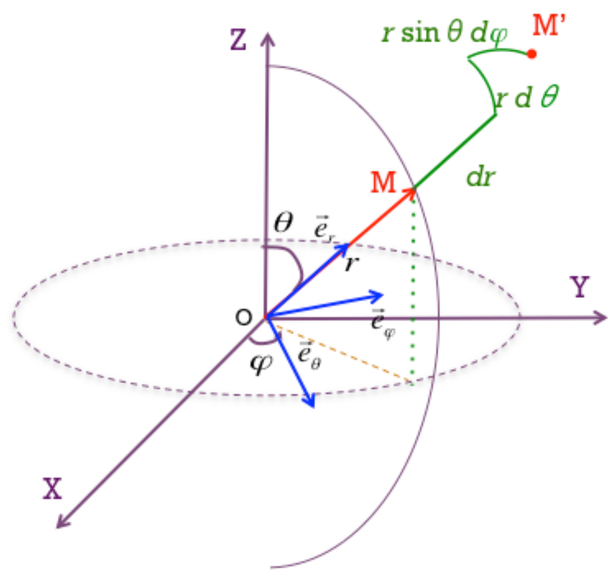


Figure V.9

Ce résultat peut être établi en calculant la différentielle du vecteur position :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= d(r\vec{e}_r) \\ &= dr\ \vec{e}_r + r\ d\vec{e}_r \\ &= dr\ \vec{e}_r + rd\theta\ \vec{e}_\theta + r\,sin\,\theta\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

puisque

$$d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}d\varphi = d\theta\ \vec{e}_\theta + sin\,\theta\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi.$$

Le même résultat peut être obtenue en suivant une approche géométrique. En effet, une variation dr de r donne lieu à un déplacement $dr\ \vec{e}_r$, une variation $d\theta$ de θ donne lieu à un déplacement $rd\theta\vec{e}_\theta$ et une variation $d\varphi$ de φ donne lieu à un déplacement $r\ sin\ \theta\ d\varphi\vec{e}_\varphi$.

V.4.3) Élément de volume en coordonnées Sphériques

L'élément de volume en coordonnées sphérique est obtenu en prenant le produit des composantes du déplacement élémentaire:

$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi}$$

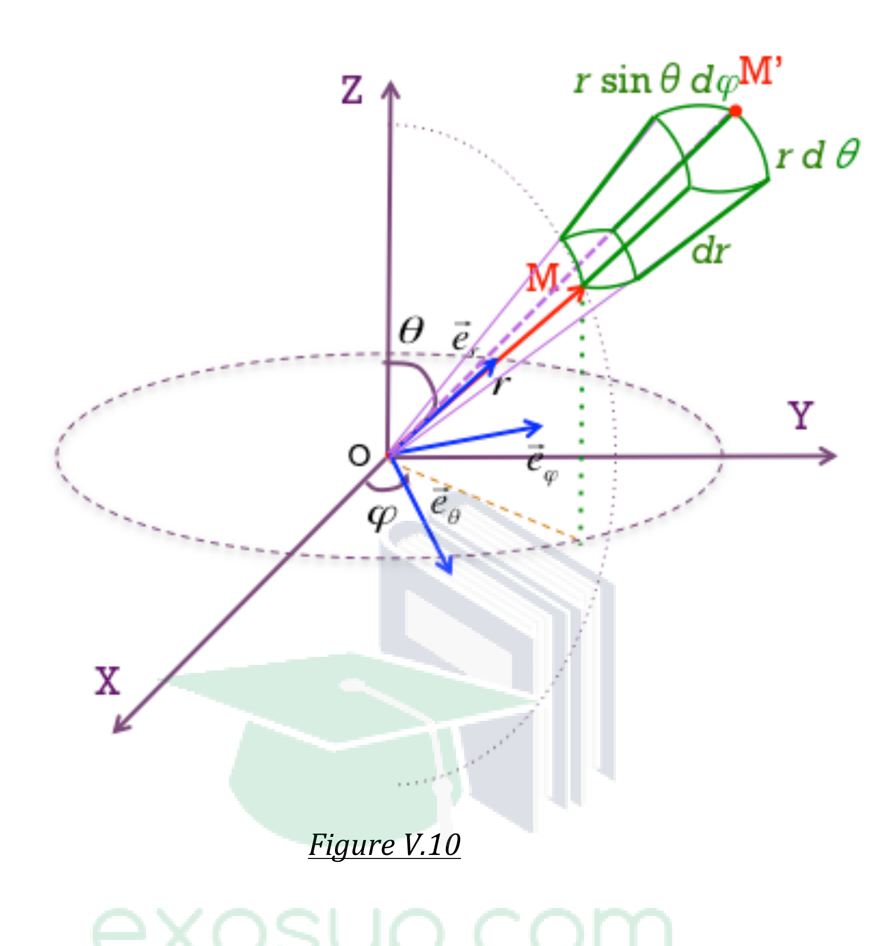


Figure V.10

Chapitre 2 : Cinématique du point matériel

I - Définitions Générales

I.1)- Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel).

I.2) – Repère

Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace.

Cela consiste à choisir un origine O et une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le trièdre $(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère d'espace.

I.3) – Référentiel

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (repère + horloge). Un référentiel est donc un objet par rapport auquel on étudie le mouvement.

Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé.

II- Cinématique sans changement de référentiel

II.1) – Trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.

La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.

II.2) – Vecteur vitesse d'un point matériel

Puisque la trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi, les caractéristiques du mouvement doivent changer d'un référentiel à un autre. Une de ces caractéristiques est le vecteur vitesse du point mobile. C'est pour cette raison qu'on utilise la notation $\vec{V}(M/R)$ pour signifier qu'il s'agit de la vitesse du point M par rapport au référentiel R. On utilisera la même notation pour les deux types de vitesse qu'on va traiter dans la suite, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

Vitesse moyenne :

Soit un point matériel décrivant une trajectoire *(C)* dans un référentiel *R*. Le point matériel occupe la position *M* à l'instant *t* et la position *M'* à l'instant *t'=t+Δt*.

La vitesse moyenne du point matériel entre *t* et *t'* est alors donnée par:

$$\vec{V}(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM'}}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc un vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{MM'}$ (si *t'>t*).

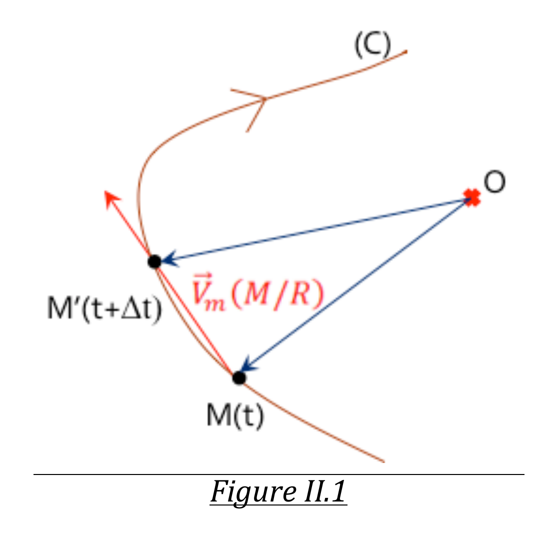


Figure II.1

Vitesse instantanée :

Le vecteur vitesse instantanée de *M* par rapport au référentiel *R* à un instant *t* est obtenue en prenant la limite *Δt →0* dans la définition de la vitesse moyenne, (*c.à.d.* les points *M* et *M'* sont infiniment proche):

$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Propriétés du vecteur vitesse instantanée :

- Son origine est la position de la particule à l'instant *t*.
- Sa direction est tangente à la trajectoire à la position considérée.
- Son sens est donné par le sens de parcours de la trajectoire.
- Son module est $\frac{ds}{dt}$ où *ds* représente le déplacement curviligne élémentaire.

On peut résumer ces propriétés dans l'expression :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau$$

où $\vec{u}_\tau$ dénote le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que le sens du mouvement.

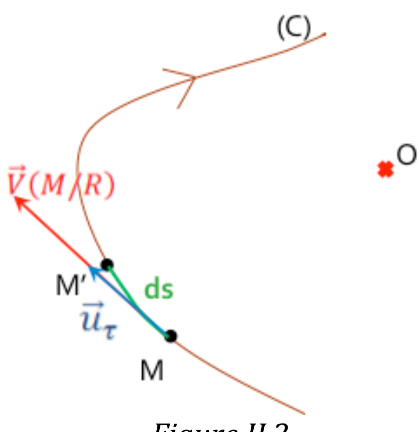


Figure II.2

II.3) – Vecteur accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle pour la vitesse, $\vec{\gamma}(M/R)$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M par rapport au référentiel R.

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, ou de façon équivalente la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps:

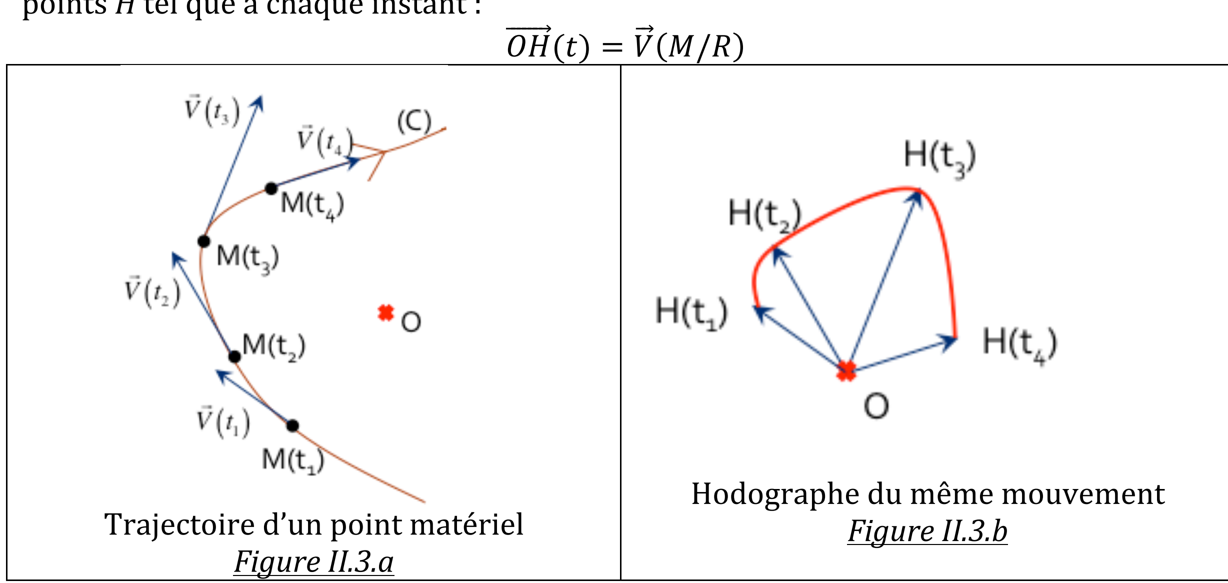
$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$$

On peut définir le vecteur accélération moyenne aussi de façon similaire au vecteur vitesse. Il mesure alors la variation moyenne de la vitesse sur un interval de temps Δt.

II.4) – Hodographe du mouvement

L'hodographe *(H)* d'un mouvement par rapport à un point fixe O est l'ensemble des points H tel que à chaque instant :

$$\overrightarrow{OH}(t) = \vec{V}(M/R)$$



Trajectoire d'un point matériel
Figure II.3.a

Hodographe du même mouvement
Figure II.3.b

La figure II.3 ci haut, décrit le mouvement d'un point matériel. A gauche la trajectoire est obtenue en reliant les extrémités du vecteur position à chaque instant t. L'hodographe, à droite, est la courbe décrite par le vecteur vitesse, d'origine O.

II.5) – Vecteur vitesse dans les différents systèmes de coordonnées

II.5.1) Cordonnées cartésiennes :

En dérivant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes étant fixes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

On utilise aussi la notation suivante

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

où le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

II.5.2) Coordonnées cylindriques :

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques on dérive le vecteur position en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$
$$= \frac{d\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right)}{dt}$$
$$= \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Sachant que $\vec{k}$ est un vecteur fixe sa dérivée est nulle $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{e}_\rho$étant mobile, sa dérivée n'est pas nulle en générale. En effet, $\vec{e}_\rho$ dépend de façon implicite de t, à travers sa dépendance de l'angle φ. Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

En utilisant l'expression du vecteur $\vec{e}_\rho$ dan la base $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ on obtient

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \frac{d(\cos\varphi\ \vec{\imath} + \sin\varphi\ \vec{\jmath})}{d\varphi} = -\sin\varphi\ \vec{\imath} + \cos\varphi\ \vec{\jmath} = \vec{e}_\varphi$$

La dérivée par rapport au temps est alors donnée par:

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

ou encore

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}}$$

II.5.3) Coordonnées sphériques :

Le vecteur position en coordonnées sphériques dépend du vecteur $\vec{e}_r$. Ce dernier dépend des angles θ et φ, donc sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

En utilisant les expressions des vecteurs $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\right)$ en fonction des vecteurs $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ données au premier chapitre *(paragraphe V.4.1)*, on montre que

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi.$$

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi}$$

ou encore

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

II.6) – Vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées

Pour obtenir les expressions des composantes du vecteur accélérations dans les différents systèmes de coordonnées il faut dériver les expressions du vecteur vitesse obtenues dans le paragraphe précédent

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

II.6.1) Coordonnées cartésiennes :

En utilisant l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left(\dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}\right)}{dt}$$

Puisque les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes sont fixes, on dérive seulement les composantes du vecteur vitesse, ce qui donne

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

On utilise parfois la notation suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

où les deux points sur une variable signifie la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

II.6.2) Coordonnées cylindriques :

En coordonnées cylindriques le vecteur accélération est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^{\,2})\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}}$$

Preuve :

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}\right)}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{\rho}\,)}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\left(\vec{e}_\rho\right)}{dt} + \frac{d(\rho)}{dt}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d(\dot{\varphi}\,)}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\,\frac{d\left(\vec{e}_\varphi\right)}{dt} + \frac{d(\dot{z}\,)}{dt}\vec{k}.$$

On avait obtenu l'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{e}_\rho$:

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

On obtient de façon similaire la dérivée du vecteur $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(-\sin\varphi\;\vec{\imath} + \cos\varphi\;\vec{\jmath}\,)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\;\vec{\imath} - \sin\varphi\;\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci dessus on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^{\,2}\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

qui donne finalement :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^{\,2})\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

II.6.3) Coordonnées sphériques :

Le vecteur accélération en coordonnées sphériques est :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/R) = \; & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right)\vec{e}_r \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Preuve :

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right)}{dt}$$

Pour dériver les vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on utilise leurs expressions en fonctions des vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On obtient alors

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho = -(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Les dérivées temporelles des vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont alors données par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

Ainsi en dérivant les composantes du vecteur vitesse en coordonnées sphériques ainsi que les vecteurs de la base, on obtient alors l'expression finale du vecteur accélération en coordonnées sphériques donnée ci dessus.

II.7) – Repère de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan on peut définir en chaque point M de la trajectoire la base de Frenet. Pour cela on définit en tout point M un vecteur $\vec{u}_\tau$, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de celle ci, et on définit le vecteur $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_\tau$ et orienté vers la concavité de la trajectoire. Pour compléter le trièdre on définit un vecteur $\vec{B}$ tel que le trièdre $(\vec{u}_\tau, \vec{u}_n, \vec{B})$ est un trièdre directe *c.à.d.* $\vec{B} = \vec{u}_\tau \wedge \vec{u}_n$. Le trièdre $(\vec{u}_\tau, \vec{u}_n, \vec{B})$ est appelé repère de Serret-Frenet.

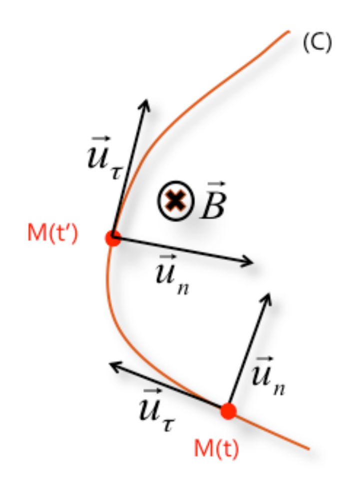


Figure II.4

Abscisse curviligne :

Dans le cas d'un mouvement curviligne il est parfois utile d'utiliser l'abscisse curviligne pour repérer la position du point matériel. Pour cela, on fixe un point *A* de la trajectoire (voir la *figure II.5*). L'abscisse curviligne s(t) est alors définie comme étant la distance curviligne du point fixe *A* au point *M(t)* qu'occupe le point matériel à l'instant t :

$$\widehat{AM} = arc(AM) = s(t)$$

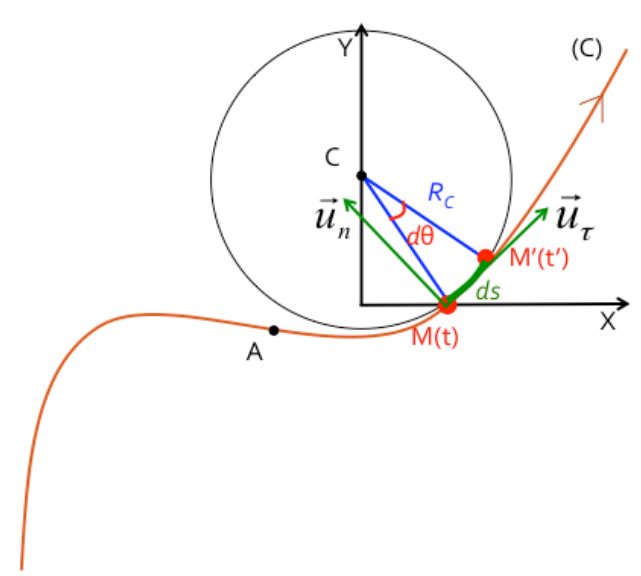


Figure II.5

A l'instant *t' =t+dt*, le point matériel occupant la position *M'(t')* on aura le vecteur position:

$$\widehat{AM'} = arc(AM') = s(t') \quad ; \quad t' = t + dt$$

Le déplacement élémentaire s'écrit alors :

$$\widehat{MM'} = arc(MM') = s(t') - s(t) = ds$$

ds est un arc de cercle de centre *C* et de rayon R_C, appelé rayon de courbure.

Les vecteurs $\vec{u}_\tau$ et $\vec{u}_n$ peuvent alors être obtenue de façon analytique de la façon suivante

$$\vec{u}_\tau = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \quad ; \quad \vec{u}_n = R_C \frac{d\vec{u}_\tau}{ds}$$

Preuve :

On a $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_\tau$, ce qui donne la définition du vecteur tangent $\vec{u}_\tau = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.

Pour le vecteur normal, on remarque d'abord d'après le figure II.5, que $\vec{u}_n$ est le vecteur directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\tau$ on a donc *(Voir exercice 2 série I)*:

$$\vec{u}_n = \frac{d\vec{u}_\tau}{d\theta}.$$

D'autre part on a $ds = R_C d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{ds}{R_C}$. Ce qui donne pour $\vec{u}_n$ l'expression $\vec{u}_n = R_C \frac{d\vec{u}_\tau}{ds}$.

Vecteur vitesse dans le repère de Frenet :

En dérivant le vecteur position par rapport au temps on trouve l'expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau$$

En effet, on a déjà vu que $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_\tau$ ce qui donne pour le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau$.

Vecteur accélération dans le repère de Frenet :

Le vecteur accélération dans la base de Frenet est donné par

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n}$$

Preuve :

Pour dériver l'expression du vecteur vitesse obtenue ci-haut, on doit dériver, entre autres, le vecteur tangentielle $\vec{u}_\tau$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{d\vec{u}_\tau}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Sachant que $\frac{ds}{dt} = V$, le module du vecteur vitesse et que $\frac{d\vec{u}_\tau}{ds} = \frac{1}{R_C}\vec{u}_n$, on obtient

$$\frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{V}{R_C}\vec{u}_n.$$

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_\tau + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n$$

Le vecteur accélération peut être décomposé en une composante tangentielle, appelée accélération tangentielle :

$$\vec{\gamma}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau$$

et une composante normale, appelée accélération normale :

$$\vec{\gamma}_n = \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n$$

tel que

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_\tau + \vec{\gamma}_n$$

ou encore en terme de modules

$$\gamma^2 = \gamma_\tau^2 + \gamma_n^2$$

On peut remarquer que la composante de l'accélération normale est toujours positive, ce qui signifie que l'accélération normale est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire.

II.8) – Exemple de mouvement : Le mouvement circulaire

On considère le mouvement d'un point matériel M dont la trajectoire est un cercle dans le plan XOY, de centre O et de rayon R.

Dans ce cas le vecteur position peut s'écrire dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$$

ou encore dans la base des coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho = R\vec{u}_r$$

Ici on a introduit le vecteur $\vec{u}_r = -\vec{u}_n$. On remarque ainsi que le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\tau, \vec{k})$ *(à ne pas confondre avec la base de Frenet)* est un trièdre directe.

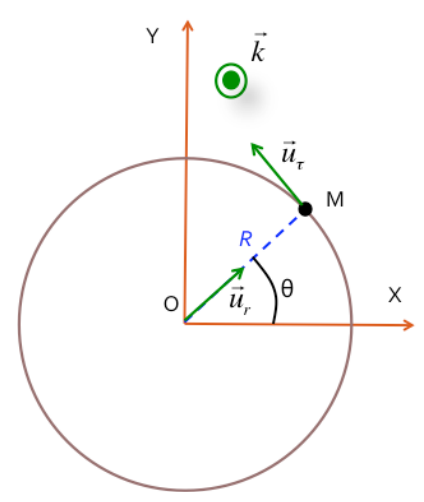


Figure II.6

II.8.1) Le vecteur vitesse :

En utilisant les résultats dans la base de Frenet le vecteur vitesse s 'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau = V\,\vec{u}_\tau$$

On avait aussi vu que $ds = R\,d\theta$, ce qui donne pour la vitesse $\vec{V}(M/R) = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\tau$. Ce qui permet d'écrire :

$$V = R\,\omega \qquad \text{où} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{est la vitesse angulaire.}$$

La rotation étant autour de l'axe OZ, on définit le vecteur rotation angulaire dans ce cas de la façon suivante :

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

On peut ainsi montrer que

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

Preuve :

Le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\tau, \vec{k})$ étant un trièdre directe on a $\vec{u}_\tau = \vec{k} \wedge \vec{u}_r$ ce qui permet d'écrire pour le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V\,\vec{u}_\tau = R\,\omega\,\vec{u}_\tau = R\,\omega\,(\vec{k} \wedge \vec{u}_r) = \omega\vec{k} \wedge R\vec{u}_r.$$

En utilisant la définition du vecteur vitesse angulaire, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, et l'expression du vecteur position, $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r$, on obtient alors $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Remarque :

Si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur unitaire : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, alors on a le résultat important suivant

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

II.8.2) Le vecteur accélération :

Là aussi, en utilisant les résultats obtenus dans la base de Frenet :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n,$$

on réécrit le vecteur accélération en fonction de la vitesse angulaire de la façon suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\tau + R\omega^2\vec{u}_n$$

$\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

Remarque – Mouvement circulaire uniforme :

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est constante, c.à.d. que l'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = Cte \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

L'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération n'a qu'une seule composante, la composante normale :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_n = R\omega^2\vec{u}_n.$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme l'accélération est toujours normale à la trajectoire et orienté vers le centre du cercle : l'accélération est centripète.

III- Cinématique avec changement de référentiel

III.1)- Mouvement relatif et mouvement absolu

On considère deux référentiels $R_1(O_1; X_1,Y_1,Z_1)$ et $R_2(O_2; X_2,Y_2,Z_2)$, de base respectives $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ et $(\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2)$, en mouvement l'un par rapport à l'autre. On suppose que R_1 est fixe, on l'appel référentiel absolu. Le référentiel R_2 est alors appelé référentiel relatif; il est en mouvement par rapport à R_1. On étudie le mouvement d'un point matériel M par rapport aux deux référentiels :

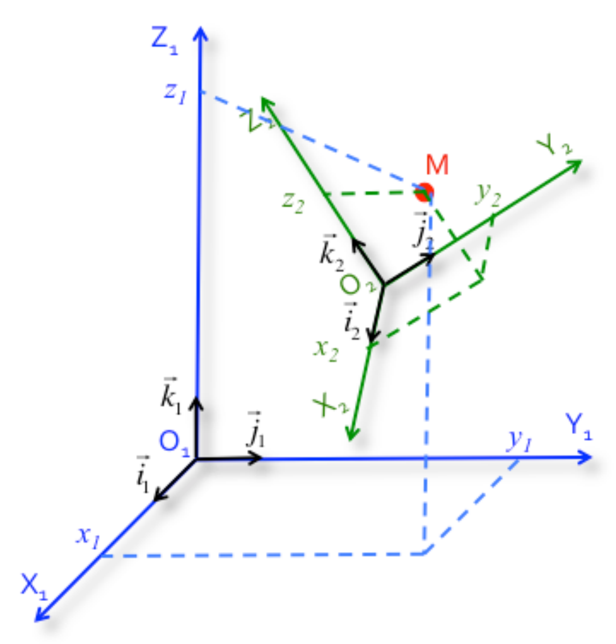


Figure III.1

III.1.1) Le mouvement absolu de M

Le mouvement de M par rapport au référentiel absolu est appelé mouvement absolu. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel R_1 *(voir figure III.1)*

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$

La vitesse absolue de M est la vitesse du point matériel M par rapport au référetiel absolu, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_1 :

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ étant liés au référentiel R_1 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$. Il suffit alors de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_1) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1.$$

L'accélération absolue est obtenue en dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel absolu :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}$$

Là aussi, il suffit de dériver les composantes du vecteur vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \ddot{x}_1\vec{\imath}_1 + \ddot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \ddot{z}_1\vec{k}_1.$$

III.1.2) Mouvement relatif de M

Le mouvement de M par rapport au référentiel relatif est appelé mouvement relatif. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel R_2 *(voir figure III.1)*

$$\overrightarrow{O_2M} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

La vitesse relative de M est la vitesse du point matériel par rapport au référentiel relatif, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_2 :

$$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$$

Dans ce cas les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ étant liés au référentiel R_2 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$. Donc là aussi, il suffit de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_2) = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2.$$

L'accélération relative est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2}$$

Elle a comme expression dans la base relative :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \ddot{x}_2\vec{\imath}_2 + \ddot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \ddot{z}_2\vec{k}_2.$$

III.1.3) Cas particulier : R_2 en translation rectiligne par rapport à R_1

Dans ce cas, les vecteurs de la base relative $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ sont aussi fixe par rapport au référentiel R_1 :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$$

III.1.4) Cas particulier : R_2 en rotation par rapport à R_1

Si le référentiel R_2 est en rotation par rapport au référentiel R_1 avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1)$. Les vecteurs de la base relative sont alors aussi en rotation avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$. En utilisant le résultat exprimé dans la remarque à la fin du paragraphe II.8.1 on obtient les dérivées temporelles respectives des vecteurs de base :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2 \quad , \quad \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2 \quad , \quad \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_2$$

III.1.5) Cas général : R_1 en mouvement quelconque par rapport à R_2

Tout mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre peut être ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation, d'où l'importance de ces deux types de mouvement.

III.2) – Dérivation en repère mobile

Dans toute la suite (sauf si autrement précisé), on va considérer les deux référentiels R_1 *et* R_2 liés respectivement au repères (O_1; X_1,Y_1,Z_1) et (O_2; X_2,Y_2,Z_2) et caractérisés, respectivement, par les bases orthonormées $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$. On considère que R_2 est en mouvement (quelconque) par rapport à R_1 et que ce mouvement est caractérisé par la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \vec{\omega}(R_2/R_1)$.

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par son expression dans le repère relatif R_2 :

$$\vec{A} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

Pour dériver le vecteur $\vec{A}$ par rapport au référentiel R_1 il faut dériver les composantes et les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ mobile par rapport à R_1 :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + x_2\frac{d\vec{\imath}_2}{dt} + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + y_2\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt} + \dot{z}_2\vec{k}_2 + z_2\frac{d\vec{k}_2}{dt}.$$

On a vu que la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à un repère fixe est donnée par $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$. En remplaçant $\vec{u}$ par les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ on obtient alors :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2 + x_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega} \wedge \vec{k}_2).$$

Or $\dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2 = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2}$ est la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel relatif et

$$x_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega} \wedge \vec{k}_2) = \vec{\omega} \wedge (x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2) = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Ce qui permet d'écrire la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel R_1 connaissant son expression dans le référentiel R_2.

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{A}}$$

III.3) – Composition des vitesses

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

où

$\vec{V}_a = \vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$: est la vitesse absolue du point matériel,

$\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$: est la vitesse relative du point matériel,

$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$: est la vitesse d'entrainement.

Preuve :
On commence par décomposer le vecteur position absolu en fonction du vecteur position relatif :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$$

La vitesse absolue est obtenue en dérivant dans le référentiel absolu *R₁* :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

En utilisant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant la dérivation en repère mobile, on exprime le dernier terme en haut (on remplace $\vec{A}$ par $\overrightarrow{O_2M}$)

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Ce qui donne pour l'expression de la vitesse absolue :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

qui est le résultat cherché. Le premier terme est la vitesse relative et les deux derniers termes donnent la vitesse d'entrainement.

III.4) – Composition des accélérations

La loi de décomposition des accélérations s'écrit de la façon suivante

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

où :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{R_1}$$

est l'accélération absolue du point matériel,

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right|_{R_2}$$

est l'accélération relative du point matériel,

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \left(\vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

est l'accélération d'entrainement, et

$$\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}_r$$

est l'accélération complémentaire, aussi appelée accélération de Coriolis.

Preuve :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_r + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)\right|_{R_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

On développe le premier et le dernier terme.

$$\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

où on a utilisé la règle de dérivation d'un vecteur dans un repère mobile. Pour le dernier terme on obtient

$$\vec{\omega}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}=\vec{\omega}\wedge\left(\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)$$
$$=\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)$$

En rapportant dans l'expression initiale, on obtient l'expression complète de l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a=\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2}+\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_2M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)+2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

Le premier terme à droite est l'accélération relative, le dernier est l'accélération de Coriolis et les termes restants composent l'accélération d'entrainement.

III.5) – Exemples de mouvements particuliers

On considère deux cas particuliers de mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

III.5.1) Mouvement rectiligne :

Si le référentiel R_2 est en translation rectiligne par rapport au référentiel absolu R_1, la vitesse de rotation angulaire est nulle

$$\vec{\omega}(R_2/R_1)=\vec{0}$$

La formule de décomposition des vitesses devient alors :

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r(M)+\left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1}$$

Le second terme n'étant rien d'autre que la vitesse absolue du point O_2 :

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r(M)+\vec{V}_a(O_2)$$

De même, l'accélération absolue s'écrit

$$\vec{\gamma}_a=\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2}+\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1}$$

Le premier terme étant l'accélération relative du point M et le second l'accélération absolue du point O_2 :

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_r(M)+\vec{\gamma}_a(O_2)$$

Si en plus le mouvement relatif est rectiligne uniforme on aura la vitesse du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu qui est constante *c.à.d.* $\vec{V}_a(O_2)=\overrightarrow{Constant}$ et $\vec{\gamma}_a(O_2)=\vec{0}$. L'accélération relative est alors égale à l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)$$

III.5.2) Mouvement de Rotation uniforme :

On suppose que le référentiel R_2 est en rotation uniforme par rapport au référentiel absolu R_1, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels $O=O_1=O_2$. Dans ce cas $\vec{\omega}(R_2/R_1)=\vec{\omega}=\overrightarrow{constant}$; *c.à.d.* $\frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt}=\vec{0}$.
Les expressions de la vitesse d'entrainement et de l'accélération d'entrainement deviennent particulièrement simples :

$$\vec{V}_e(M)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$
$$\vec{\gamma}_e(M)=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

Chapitre 3 : Dynamique du point matériel

I – Lois fondamentales de la dynamiques

I.1)- Définitions

Le Référentiel de Copernic:

Le référentiel de Copernic a pour centre le centre du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).

Référentiel géocentrique :

Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la terre et ses axes ont des directions fixes qui sont celles du référentiel de Copernic.

Référentiel terrestre:

Un référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre. Son origine est donc un point de la planète et ses axes sont fixes par rapport à elle.

I.2) – Première loi de Newton – Principe d'inertie

I.2.1) Enoncé du principe d'inertie :

Dans un référentiel Galiléen, un système isolé est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

Un système isolé est un système qui n'est soumis à aucune force.
Un référentiel Galiléen est aussi appelé référentiel d'inertie.

I.2.2) Référentiel Galiléen :

Le principe d'inertie permet en même temps de définir le référentiel Galiléen, Il s'agit en effet, de tout référentiel où le principe d'inertie est applicable.

Le principe d'inertie stipule donc que l'accélération d'un point matériel isolé est nulle dans un référentiel Galiléen. Or, d'après les résultats du chapitre précédent, l'accélération du point matériel sera aussi nulle dans tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen. Ceci conduit au résultat suivant :

Tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est aussi Galiléen.

I.2.3) Exemples de référentiel Galiléens

Référentiel de Copernic :

Le référentiel de Copernic est un référentiel Galiléen.

Référentiel géocentrique :

On considère que le référentiel géocentrique est un référentiel Galiléen pour des expériences dont la durée est très petite par rapport à la période de révolution de la

terre autour du soleil. En effet, la terre tourne autour du soleil et son mouvement (comme on le verra ultérieurement) est elliptique avec une période de révolution de, à peu près, 365 jours. Son mouvement n'est donc pas rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic. Cependant, on peut considérer qu'il est en translation rectiligne uniforme pour une durée très petite comparée à la période de révolution de la terre autour du soleil.

Référentiel terrestre :

Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique avec une période de 24 heures. Donc il n'est pas réellement un référentiel galiléen. Cependant, pour des phénomènes physiques dont la durée est très petite par rapport à 24 heure, on peut le considérer comme étant Galiléen.

I.3) – Deuxième loi de Newton – Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Enoncé du principe fondamental de la dynamique :

Dans un référentiel Galiléen la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M)$$

Cette loi permet de relier la cinématique du point matériel aux causes du mouvement. Ainsi les systèmes dit pseudo-isolés (systèmes pour lesquels la somme des forces appliquées est nulles) ont une accélération nulle.

I.4) – Troisième loi de Newton – Principe de l'action et de la réaction

Si un objet (1) exerce une force, $\vec{F}_{1\to 2}$, sur un autre objet (2), ce dernier exerce en retour une force, $\vec{F}_{2\to 1}$, d'intensité égale mais de sens opposée:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Il est important de noter que cette loi, aussi appelée principe des actions réciproques, est indépendante du référentiel d'étude.

I.5) – Expression du PFD en utilisant la quantité de mouvement

Définition :

Pour un point matériel M, de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, la quantité de mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\,\vec{V}(M/\mathcal{R})$$

Relation avec l'accélération :

En dérivant la définition ci-haut, on montre que la dérivée de la quantité de mouvement est proportionnelle à l'accélération. En effet, on a

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = m\,\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

PFD :

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors en terme de la quantité de mouvement :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{ext}$$

II- Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

L'énoncé du principe fondamental de la dynamique donné auparavant est valide dans un référentiel Galiléen. Cependant nous avons vu, avec la loi de composition des accélérations, que l'accélération n'est pas nécessairement la même dans tous les référentiels. En particulier, l'accélération dans un référentiel Galiléen n'est pas la même que dans un référentiel non Galiléen.

II.1) – PFD et forces d'inertie.

Considérant un référentiel non Galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$.
Le PFD, dans le référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

$\mathcal{R}$ étant le référentiel absolu et $\mathcal{R}'$ le référentiel relatif, la loi de composition des accélérations s'écrit alors:

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

Le PFD dans $\mathcal{R}$ devient alors

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}_r(M) + m\,\vec{\gamma}_e(M) + m\,\vec{\gamma}_c(M)$$

Ceci permet d'écrire le PFD, dans le référentiel non-Galiléen (relatif) $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} m\,\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}') &= m\,\vec{\gamma}_r(M) \\ &= \sum \vec{F}_{ext} - m\,\vec{\gamma}_e(M) - m\,\vec{\gamma}_c(M) \\ &= \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \end{aligned}$$

où on a appelé les termes $-\,m\,\vec{\gamma}_e(M) - m\,\vec{\gamma}_c(M)$, les forces d'inertie. En particulier nous avons

$\vec{F}_{ie} = -\,m\,\vec{\gamma}_e(M)$: est la force d'inertie d'entrainement
$\vec{F}_{ic} = -\,m\,\vec{\gamma}_c(M)$: est la force d'inertie de Coriolis.

Dans un référentiel non-Galiléen il faut, en plus des forces extérieures agissant sur le point matériel, tenir compte des forces d'inertie. Cependant il est important de noter que les forces d'inertie ne sont pas dues à une interaction particulière. Elles ne sont donc pas considérées comme des forces réelles au même titre que les autres forces, même si leurs effets physiques sont réels.

Remarques :

- ♠ Si $\mathcal{R}'$ est un référentiel Galiléen, les forces d'inertie sont nulles, et le PFD s'y applique donc sans modifications.
- ♠ Le PFD dans un référentiel non galiléen s'exprime aussi en utilisant la quantité de mouvement :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}')}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Si $\mathcal{R}'$ n'est pas Galiléen.

II.2) Exemples particuliers :

$\mathcal{R}'$ en translation rectiligne par rapport à $\mathcal{R}$:

Dans ce cas on a

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}$$

Ce qui donne pour les forces d'inertie :

$$\vec{F}_{ie} = -m\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

$\mathcal{R}'$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}$:

On considère le cas où le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels O : $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$. On a alors

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Les forces d'inerties sont obtenues en multipliant ces accélérations par le facteur (-m) :

$$\vec{F}_{ie} = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} - m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Si on plus, le mouvement de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est uniforme :
$\vec{\omega} = \overrightarrow{constante}$, les forces d'inertie s'écrivent alors sous la forme :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

III – Théorème du moment cinétique

Dans plusieurs cas, il est plus commode d'utiliser le théorème du moment cinétique que le PFD.

Dans la suite, on considère le mouvement d'un point matériel M, de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ et O un point fixe de ce référentiel.

III.1) – Moment cinétique par rapport à un point fixe

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par

$$\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})$$

III.2) – Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à un axe fixe Δ, passant par O et de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par:

$$\mathcal{M}_\Delta(M/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}).\vec{u}_\Delta$$

III.3) – Moment dynamique par rapport à un point fixe

Le moment dynamique du point matériel M par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par

$$\vec{\delta}_O(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

En effet, la dérivée du moment cinétique est

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}$$

Le premier terme donne $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$, et le second donne : $\overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$. Ce qui donne finalement l'expression du moment dynamique $\vec{\delta}_O(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$.

III.4) – Moment d'une force

Si M est soumis à une force $\vec{F}$ alors on défini le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O dans le référentiel $\mathcal{R}$ par

$$\vec{\Pi}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un axe fixe Δ, passant par O et de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par

$$\Pi_\Delta(\vec{F}) = \vec{\Pi}_O(\vec{F}).\vec{u}_\Delta$$

III.5) – Théorème du moment cinétique dans un référentiel Galiléen

Dans un référentiel Galiléen, le moment dynamique d'un point matériel M par rapport à un point fixe O dans un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ est égal au moment de la résultante des forces extérieurs exercées sur M :

$$\vec{\delta}_O(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{\Pi}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$$

Le théorème du moment cinétique est une conséquence directe de la définition du moment dynamique et du principe fondamentale de la dynamique dans un référentiel Galiléen :

$$\vec{\delta}_O(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{\Pi}_O\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$$

III.6) – Théorème du moment cinétique projeté sur un axe (Δ)

Le théorème du moment cinétique peut être exprimé par rapport à un axe (Δ) :

$$\frac{d\mathcal{M}_\Delta(M/\mathcal{R})}{dt} = \Pi_\Delta\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$$

Chapitre 4 : Etude Energétique

I – Travail et Puissance d'une force

I.1)- Puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{V}(M/R)$, par rapport à un référentiel R, soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de $\vec{F}$ dans le référentiel R est définie par:

$$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}(M/R).$$

La puissance dépend du référentiel et son unité est le Watts (W).

- Si la puissance est positive, $P(\vec{F}) > 0$, la force est dite *motrice*.
- Si la puissance est négative, $P(\vec{F}) < 0$, la force est dite *résistante*.
- Si la puissance est nulle, $P(\vec{F}) = 0$, Il s'agit d'une force qui ne travail pas. C'est le cas d'une force perpendiculaire au mouvement du point matériel ou d'un point matériel immobile.

I.2) – Travail d'une force

1.2.1) Travail élémentaire d'une force :

Lorsqu'on veut déplacer un objet, l'effort fourni est d'autant plus grand que la distance parcourue est grande et que la force à appliquer est grande. Cet effort peut dépendre aussi de la trajectoire suivie pour déplacer l'objet. Le travail, est une notion physique qui va rendre compte de cet effort.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ appliqué au point matériel M lors de son déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est donné par

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = P(\vec{F})dt.$$

1.2.2) Travail d'une force :

Soit un point matériel M, décrivant une trajectoire *(C)* par rapport à un référentiel R. On suppose que le point matériel passe par le point M_1 à l'instant t_1 et par le point M_2 à l'instant t_2. Le travail de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement est:

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F})dt.$$

L'unité du travail est le Joule [Joule=N.m]

- La force est dite motrice si son travail est positif $W > 0$.
- La force est résistante si son travail est négatif $W < 0$.
- La force ne travail pas si son travail est nul $W = 0$.

II- Forces conservatives – Energie potentielle

II.1) – Définition

Une force est dite conservative si son travail entre deux point M_1 et M_2 dépend uniquement de la position de départ et de la position d'arrivée. Autrement dit, le travail est indépendant du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2.

Définition équivalente :

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle dérive d'un potentiel; c.à.d. qu'il existe une fonction scalaire E_p tel que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p.$$

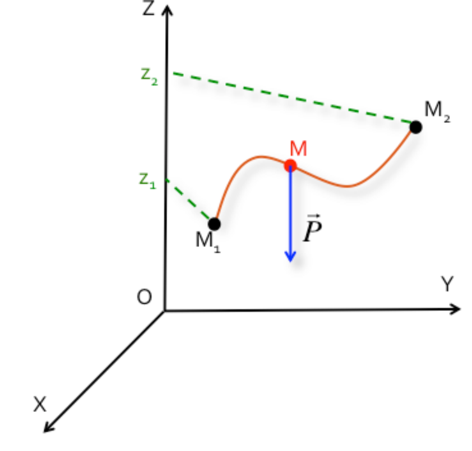
E_p est alors appelé l'énergie potentielle du point M.

Remarques :

- ♠ L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près ; *c.à.d.* que E_p et $E'_p = E_p + C$ (où C est une constante), donnent lieu à la même force conservative :
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E'_p = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p + C\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p.$$
- ♠ Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \vec{0}$, quelque soit la fonction *f*, pour vérifier qu'une force $\vec{F}$ est conservative, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$.

II.2) Exemples :

II.2.1) La force de Pesanteur



Dans un référentiel Galiléen R(O;X,Y,Z), on considère le mouvement d'un point matériel M de masse *m* soumis à la pesanteur terrestre: $\vec{P} = -mg\vec{k}$.

Le travail du poids quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}.d\overrightarrow{OM} = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz$$

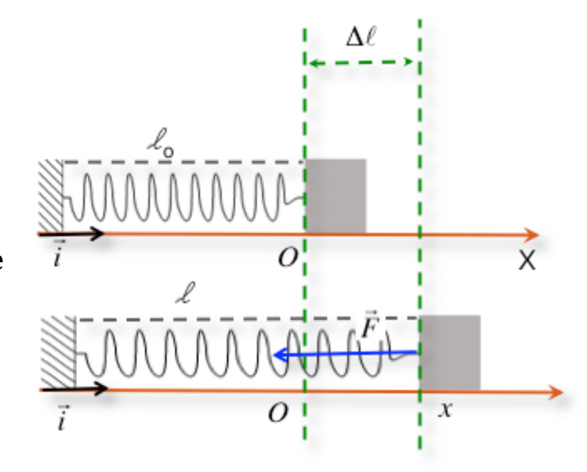
$$W_{M_1\to M_2}(\vec{P}) = -mg(z_2 - z_1) = -mg\Delta h$$

L'énergie potentielle peut être calculer en utilisant la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ et elle est donnée par

$$E_p = mgz + C$$

où *C* est une constante d'intégration.

II.2.2) La force de rappel d'un ressort



On considère le mouvement d'un point matériel attaché à un ressort de raideur *k*. En se basant sur le schéma à coté, la force de rappel du ressort est donnée par

$$\vec{F} = -k\Delta\ell\,\vec{i} = -kx\vec{i}$$

Le travail de cette force quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx$$

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right).$$

L'énergie potentielle dont dérive la force de rappel est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

II.3) Travail d'une force conservative

On remarque d'après les exemples précédents que le travail fourni par la force quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -\left(E_p(M_2) - E_p(M_1)\right)$$

Travail élémentaire:

C'est un résultat général puisqu'on a

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}}\, E_p . d\overrightarrow{OM}$$

et pour le travail élémentaire

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p . d\overrightarrow{OM}.$$

On obtient donc que :

$$\delta W = -dE_p.$$

Le travail élémentaire peut être exprimé en fonction de la puissance de la façon suivante $\delta W = P(\vec{F})dt$, ce qui permet de trouver la relation suivante entre l'énergie potentielle et la puissance d'une force :

$$P(\vec{F}) = -\frac{dE_p}{dt}$$

III – Energie cinétique

III.1) Définition

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{V}(M/R)$ par rapport à un référentiel Galiléen, R, est définie par

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(M/R)$$

ou encore, en fonction de la quantité de mouvement

$$E_c = \frac{1}{2m} \vec{p}^2(M/R).$$

III.2) Théorème de la puissance:

Enoncé :

La puissance de la résultante, $\vec{F}_{\text{ext}}$, de toutes les forces extérieures appliquées à un point matériel dans un référentiel Galiléen est égale à la dérivée de son énergie cinétique:

$$P(\vec{F}_{\text{ext}}) = \frac{dE_c}{dt}$$

Preuve :

La puissance de la résultante des forces extérieures peut être exprimée de la façon suivante

$$P(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{F}_{\text{ext}}.\vec{V}(M/R) = m\vec{\gamma}(M/R).\vec{V}(M/R) = m\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}.\vec{V}(M/R)$$

où on a utilisé le PFD dans un référentiel Galiléen.

D'autre part nous avons la relation suivante

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d\vec{V}^2(M/R)}{dt} = \frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = 2\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}$$

En remplaçant dans la première relation on trouve

$$P(\vec{F}_{\text{ext}}) = \frac{1}{2}m\frac{dV^2}{dt} = \frac{dE_c}{dt}.$$

III.3) Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé :
Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique, entre deux position M_1 et M_2 d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieurs (dont la résultante est noté $\vec{F}_{\text{ext}}$) est égal au travail de cet résultante entre ces deux points :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1)$$

Preuve :
Pour le travail élémentaire on a la relation suivante

$$\delta W(\vec{F}_{\text{ext}}) = P(\vec{F}_{\text{ext}})dt = dE_c$$

qui est l'expression locale du théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \Delta E_c$$

IV – Energie mécanique

IV.1) Définition

Dans un référentiel Galiléen, l'énergie mécanique (énergie totale) d'un point matériel est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle:

$$E_m = E_c + E_p$$

IV.2) Théorème de l'énergie mécanique

Enoncé :
La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux positions M_1 et M_2 est égale au travail des **forces non conservatives** agissant sur le point matériel:

$$\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

Preuve :
Le travail de la résultante des forces extérieures agissant sur un point matériel M est égale à la variation de l'énergie cinétique. D'autre part le travail de cette résultante est égal à la somme des travaux des forces conservatives et des forces non conservatives :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \Delta E_c = \Delta E_m - \Delta E_p \quad et \quad W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_C) + W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

où

$\vec{F}_{\text{ext}}$: dénote la résultante de toutes les forces agissant sur M.

$\vec{f}_C$: dénote la résultante de toutes les forces conservatives agissant sur M.

$\vec{f}_{NC}$: dénote la résultante de toutes les forces non-conservatives agissant sur M.

On a donc l'égalité suivante :

$$\Delta E_m - \Delta E_p = W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_C) + W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

Or $W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_C) = -\Delta E_p$, ce qui donne le résultat

$$\Delta E_m = W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

IV.3) Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système conservatif est conservée au cours du temps:

$$E_m = E_c + E_p = E_0 = \text{constante}$$

ou encore $\frac{dE_m}{dt} = 0$

V- Equilibre et stabilité d'un système conservatif

V.1) Positions d'équilibre:

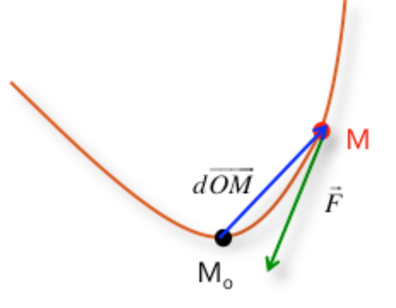
Dans un référentiel Galiléen, On considère un point matériel soumis à des **forces conservatives** dont la résultante est $\vec{F}$. La position d'équilibre du point matériel correspond à un **extremum** de l'énergie potentielle. Donc, si M_0 est une position d'équilibre les dérivées premières de l'énergie potentielle doivent être nulles en ce point :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right|_{M_0}$$

V.2) Stabilité de l'équilibre:

La position d'équilibre est dite stable si le point matériel y retourne spontanément suite à une perturbation l'éloignant de cette position. Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

V.2.1) Equilibre stable – Ep minimale:



Soit un point matériel M ayant la position d'équilibre M_0.

M_0 est une position d'équilibre stable si l'énergie potentielle est minimale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension ($E_p(x)$), la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est positive dans une position d'équilibre stable :

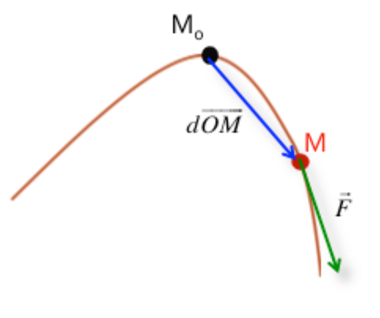
$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{M_0} > 0$$

c.à.d. que le point M_0 est un minimum de la fonction $E_p(x)$.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est négatif :

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p < 0$$

V.2.2) Equilibre instable–Ep maximale:



M_0 est une position d'équilibre instable si l'énergie potentielle est maximale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension ($E_p(x)$), la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est négative dans une position d'équilibre instable :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{M_0} < 0$$

c.à.d. que le point M_0 est un maximum de la fonction $E_p(x)$.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est positif :

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p > 0$$

Chapitre 5 : Application - Forces Centrales

I – Force Centrale

I.1)- Définition

Un point matériel est soumis à une ***force centrale***, si cette force est toujours dirigée vers un point fixe O du référentiel considéré.

En choisissant O comme centre du référentiel, la force s'écrit donc: $\vec{F} = F\vec{e}_r$.
$\vec{e}_r$ étant le vecteur unitaire radial des coordonnées polaire (*noté* $\vec{e}_\rho$ *dans le chapitre* 1).
Dans ce cas aussi, la force centrale $\vec{F}$ est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Exemples :

- Interaction gravitationnelle : $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{e}_r$
- Interaction électrostatique (Force de Coulomb) : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$
- Force de rappel d'un ressort : $\vec{F} = -Kx\vec{\imath}$

I.2) – Conservation du Moment Cinétique

Le moment cinétique d'une force centrale par rapport au point vers lequel elle est dirigée est conservé:

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{0}$$

Preuve :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{V}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{V}(M/R) \wedge m\vec{V}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R)$$

En utilisant le P.F.D. de la dynamique : $m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{F}$, et sachant que $\vec{F}$, est une force centrale ($\vec{F}$ // $\overrightarrow{OM}$) on en déduit que $\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{0}$.

I.3) – Mouvement Plan

Une conséquence immédiate de la conservation du moment cinétique est que le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan.

En effet, le moment cinétique étant perpendiculaire au vecteur position et au vecteur vitesse, ces deux vecteurs appartiennent donc à un plan fixe (puisque perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O(M/R) = \overrightarrow{cte}$) qui est le plan du mouvement. De ce fait, en général, les coordonnées polaires sont plus adéquates pour la description d'un mouvement à force centrale.

1.4) – Loi des aires

Constante des aires :

Une deuxième conséquence de la conservation du moment cinétique dans le cas des forces centrales est que la quantité $r^2\dot{\varphi}$ est constante :

$$r^2\dot{\varphi} = C$$

C est appelée la constante des aires.

En effet, en utilisant les expressions en coordonnées polaires du vecteur position, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, et du vecteur vitesse, $\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, on obtient l'expression du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

Le moment cinétique étant conservé on en déduit que $r^2\dot{\varphi}$ est une constante.

Loi des aires (2ème loi de Kepler):

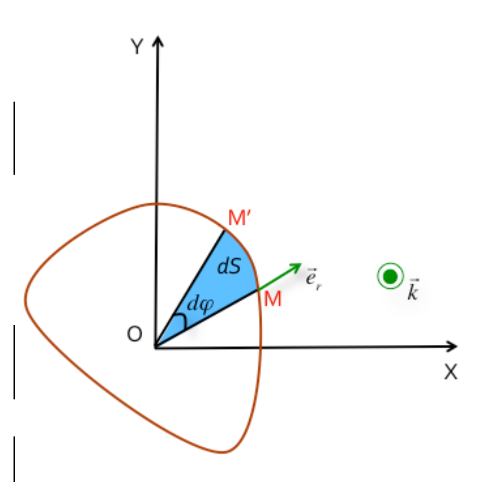
La loi des aires stipule que la vitesse aréolaire est constante pour un mouvement à force centrale. Cela peut être aussi exprimé sous la forme suivante : « *Le vecteur position balaie des surfaces égales en des intervalles de temps égaux* ».

Preuve :

La vitesse aréolaire est définie comme étant le taux de variation, dans le temps, de la surface balayé par le vecteur position :

$$\vartheta = \frac{dS}{dt}$$

dS étant l'élément de surface balayé par le vecteur position en un intervalle de temps dt (*à ne pas confondre avec l'abscisse curviligne* ds). En utilisant le schéma à coté on peut écrire l'élément de surface en fonction de l'élément d'angle :



$$dS = \frac{r(rd\varphi)}{2} = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$$

La vitesse aréolaire s'écrit alors :

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}C$$

C étant la constante des aires, cela démontre que la vitesse aréolaire est une quantité constante dans le cas d'un mouvement à force centrale.

I.5) – Formules de Binet

1.5.1) – Première formule de Binet (Energie cinétique):

L'énergie cinétique d'un point matériel soumis à une force centrale est donnée par l'expression suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2[(u')^2 + u^2]$$

où on a utilisé les notations suivantes :

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad u' = \frac{du}{d\varphi}.$$

Preuve :

En coordonnées polaires le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

et son module défini par :

$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$$

En utilisant $r = \frac{1}{u}$ on a $\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$ et on écrit $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2}u'\dot{\varphi}$

Ou encore

$$\dot{r} = -Cu'$$

où on a utilisé la définition de la constante des aires : $C = r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{u^2}\dot{\varphi}$.

Ce qui donne donc

$$\dot{r}^2 = C^2(u')^2$$

L'autre terme dans le module de la vitesse s'écrit :

$$r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{r^2} = u^2C^2$$

Le carré du module de la vitesse s'écrit donc

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = C^2(u')^2 + u^2C^2$$

$$\boxed{V^2 = C^2[(u')^2 + u^2]}$$

Ce qui donne la première formule de Binet.

1.5.2) – Deuxième formule de Binet (La force):

La force centrale exercée sur un point matériel peut être écrite sous la forme :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R) = -mC^2u^2[u" + u]\vec{e}_r$$

avec $u" = \frac{d^2u}{d\varphi^2}$.

Preuve :

En coordonnées polaires le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r$$

La composante suivant $\vec{e}_\varphi$ est nulle, puisque $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{dC}{dt} = 0$, où $C = r^2\dot{\varphi}$ est la constante des aires.

On peut écrire la composante radiale de l'accélération en fonction de C, u et u'' :

On avait déjà établi que $\dot{r} = -Cu'$ ce qui donne pour $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -C\frac{du'}{dt} = -C\frac{du'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -Cu''\dot{\varphi} = -C^2u''u^2.$$

Dans la dernière égalité on a utilisé $\dot{\varphi} = Cu^2$.

On a aussi

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{r^3} = u^3C^2$$

Le vecteur accélération s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r = (-C^2u''u^2 - u^3C^2)\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r}$$

Qui permet d'établir la deuxième formule de Binet en utilisant le P.F.D.

II- Champ Newtonien

II.1) – Définition

Une force est dite Newtonienne si c'est une force centrale qui varie selon la loi $1/r^2$:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

k étant une constante.
La force est attractive si k est positive; elle est répulsive si k est négative.

Exemples :

- Interaction gravitationnelle : $k = Gm_1m_2$
- Interaction électrostatique (Force de Coulomb) : $k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_1q_2$

II.2) – Equation de la Trajectoire

L'équation différentielle du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale s'écrit :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{mC^2}$$

Cette équation peut être établie en utilisant les formules de Binet avec le principe fondamentale de la dynamique ou encore en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

Preuve 1 (en utilisant le PFD):

Une force Newtonienne s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -ku^2\vec{e}_r$$

où $u = 1/r$.
D'un autre côté, en utilisant la deuxième formule de Binet on écrit la force sous forme :

$$\vec{F} = -mC^2u^2[u" + u]\vec{e}_r$$

En égalisant les deux expressions on obtient

$$-ku^2\vec{e}_r = -mC^2u^2[u" + u]\vec{e}_r$$
$$k = mC^2[u" + u]$$

ou encore

$$u" + u = \frac{k}{mC^2}$$

Preuve 2 (en utilisant la conservation de E_m):

Une force Newtonienne étant une force conservative, elle dérive d'une énergie potentielle qui s'écrit sous la forme (utiliser $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$):

$$E_p = -\frac{k}{r} + Cte.$$

En considérant que l'énergie potentielle s'annule à l'infini on obtient :

$$E_p = -\frac{k}{r} = -ku$$

D'autre part l'énergie cinétique s'écrit en utilisant la première formule de Binet :

$$E_c = \frac{1}{2}mC^2[(u')^2 + u^2]$$

L'énergie mécanique s'écrit alors :

$$E_m = E_p + E_c = -ku + \frac{1}{2}mC^2[(u')^2 + u^2]$$

$\vec{F}$ étant conservative, l'énergie mécanique doit être conservée :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$-k\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}mC^2\left[\frac{d(u')^2}{dt} + \frac{du^2}{dt}\right] = 0$$

ou encore

$$-k\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}mC^2\left[2u'\frac{du'}{dt} + 2u\frac{du}{dt}\right] = 0$$

$$-k\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}mC^2\left[2u'\frac{du'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + 2u\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right] = 0$$

en simplifiant par $\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = u'\frac{d\varphi}{dt}$ qui ne peut être nul :

$$-k + mC^2\left[\frac{du'}{d\varphi} + u\right] = 0$$

qui permet d'écrire (sachant que $\frac{du'}{d\varphi} = u''$) :

$$u'' + u = \frac{k}{mC^2}$$

La solution de l'équation différentielle (de second ordre avec second membre) du mouvement s'écrit sous la forme :

$$u(\varphi) = u_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{mC^2}$$

En utilisant les notations suivantes :

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{mC^2}{k}, \qquad e = pu_0$$

avec ε dénotant le signe de k *c.à.d.* $\begin{cases}\varepsilon = 1 & \text{si } k > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } k < 0\end{cases}$, on obtient l'expression de l'équation de la trajectoire en termes des coordonnées polaires (r, φ) :

$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre p et d'excentricité e, où O est l'un des foyers.

Dans toute la suite, on va prendre $\varphi_0 = 0$ et $\varepsilon = 1$ (force attractive), donnant comme équation de la trajectoire :

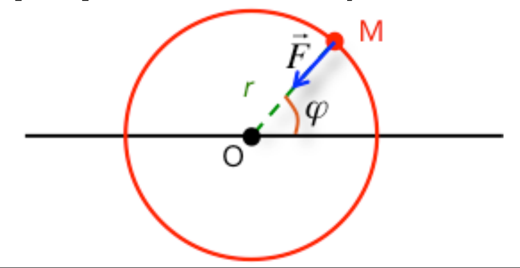
$$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}$$

II.3) – Classification d'une Trajectoire selon son excentricité

Suivant la valeur de l'excentricité e, on peut obtenir plusieurs types de trajectoires.

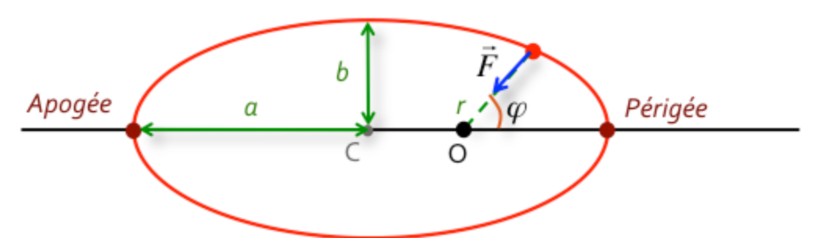
II.3.1) Trajectoire circulaire

Pour $e = 0$, la conique est un cercle, puisque dans ce cas $r = p$ est constant.



II.3.2) Trajectoire elliptique

Pour $0 < e < 1$, la trajectoire est une ellipse, pour laquelle O est un des foyers.



On appelle le périgée le point de la trajectoire le plus proche du foyer O; il est obtenu pour l'angle $\varphi = 0$, et est situé à une distance $r_{\min}$ de O :

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}.$$

De la même manière on définit l'apogée, qui est le point de la trajectoire le plus loin du point O; il est obtenu pour $\varphi = \pi$, et est situé à une distance $r_{\max}$ de O :

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}.$$

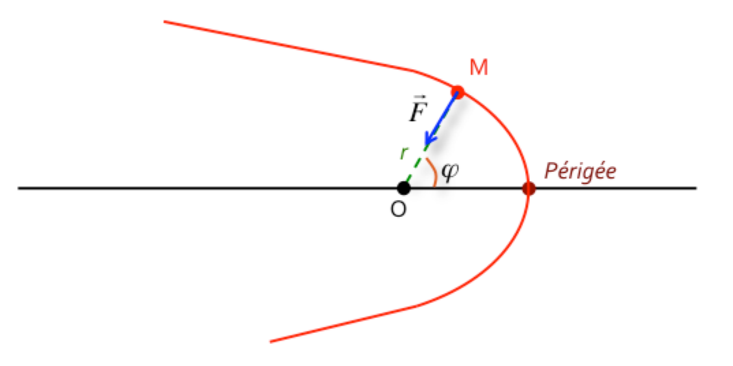
Il est important de ne pas confondre le point O, un des foyers, et le centre C de l'ellipse. La distance entre un foyer et le centre est donnée par la distance c suivante :

$$c = CO = CF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

a étant le demi grand axe, et b le demi petit axe de l'ellipse. L'excentricité, e, et le paramètre, p, de l'ellipse sont alors donnés par les relations suivante :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a} \quad ; \quad p = \frac{b^2}{a} \quad ; \quad p = a(1 - e^2)$$

II.3.3) Trajectoire parabolique

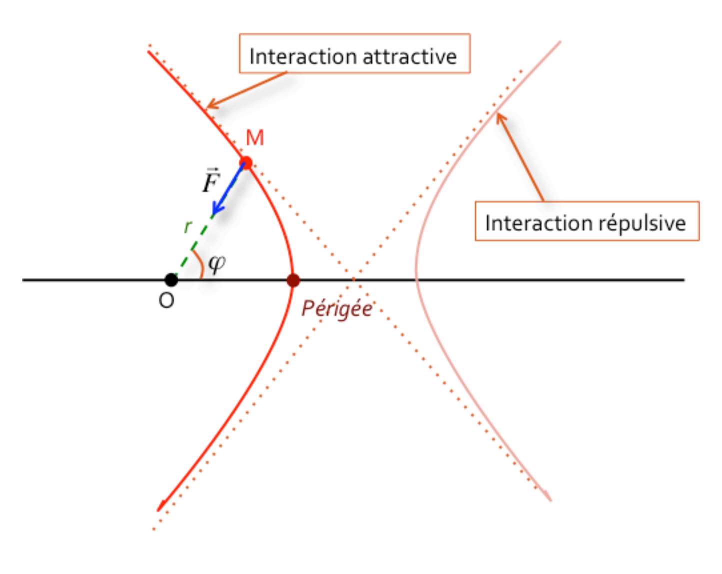


Pour $e = 1$, la trajectoire est une parabole; l'équation de la trajectoire s'écrit dans ce cas:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

Le périgée est obtenu pour $\varphi = 0$, et est situé à une distance r_p de O : $r_{\min} = \frac{p}{2}$.

II.3.4) Trajectoire hyperbolique



Pour $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole. Cependant, puisque les deux branches de l'hyperbole sont déconnectées, le point matériel se déplace uniquement sur l'une des branches de l'hyperbole. L'une correspond à la trajectoire d'un point matériel sous l'action d'une force attractive et l'autre sous l'action d'une force répulsive.

Le périgée est obtenu pour $\varphi = 0$, et est situé à une distance r_p de O : $r_p = \frac{p}{2}$.

Il est à noter aussi que pour e<1 la trajectoire est fermée (cercle ou ellipse) on parle alors

d'états liés. La trajectoire est ouverte (parabole ou hyperbole) pour $e \geq 1$ et on parle d'états libres.

II.4) – Classification d'une Trajectoire selon son Energie Mécanique

II.4.1) Energie Potentielle

La force newtonienne étant conservative, elle dérive d'une énergie potentielle: $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$. L'énergie potentielle s'écrit dans ce cas :

$$E_p = -\frac{k}{r} + Cte.$$

En général, en prend comme état de référence pour l'énergie potentielle associée à une force newtonienne quand $r \longrightarrow \infty$; ceci permet d'annuler la constante d'intégration:

$$E_p = -\frac{k}{r}.$$

En remplaçant r par l'expression obtenue pour l'équation de la trajectoire E_p s'écrit alors:

$$\boxed{E_p = -\frac{k}{p}(1 + e\cos\varphi).}$$

II.4.2) Energie Cinétique

On utilise la deuxième formule de Binet

$$E_c = \frac{1}{2}mC^2[(u')^2 + u^2]$$

avec $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi)$ et $u' = \frac{du}{d\varphi} = -\frac{e}{p}\sin\varphi$. L'énergie cinétique s'écrit alors sous la forme:

$$E_c = \frac{mC^2}{2p^2}[1 + e^2 + 2e\cos\varphi]$$

ou encore

$$\boxed{E_c = \frac{k}{2p}[1 + e^2 + 2e\cos\varphi]}$$

II.4.3) Energie Mécanique

En utilisant les expression établie ci-haut pour l'énergie potentielle et l'énergie mécanique on obtient l'expression de l'énergie mécanique:

$$E_m = E_p + E_c$$

$$\boxed{E_m = -\frac{k}{2p}[1 - e^2]}$$

L'énergie mécanique, comme prévue, est constante ; sa valeur est alors entièrement déterminée par les conditions initiales (r_0, V_0) :

$$E_m = -\frac{k}{r_0} + \frac{1}{2}mV_0^2.$$

II.4.4) Classification des trajectoires selon l'énergie mécanique

L'énergie mécanique peut être utilisé pour déterminer la trajectoire :

- ♠ $E_m = -\frac{k}{2p} < 0$, un cercle ($e = 0$).
- ♠ $-\frac{k}{2p} < E_m < 0$, une ellipse ($0 < e < 1$).
- ♠ $E_m = 0$, une parabole ($e = 1$).
- ♠ $E_m > 0$, une hyperbole ($e > 1$).

Ainsi on obtient un état lié (trajectoire fermée) pour $E_m < 0$, tandis qu'on a un état libre (trajectoire ouverte) pour $E_m \geq 0$.

III – Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler sont des lois empiriques, elles ont été établies à partir des observations astronomiques du mouvement des planètes:

Première loi de Kepler

La trajectoire des centres des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le soleil.

Deuxième loi de Kepler

Les rayons vecteurs balaient des aires égales pour des intervalles de temps égaux; c'est la loi des aires.

III.3) Troisième loi de Kepler

Le rapport entre le carré de la période T de la révolution d'une planète autour du soleil et le cube du demi-grand axe a de la trajectoire est indépendant de la planète:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m\pi^2}{k} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Soleil}}} = \text{Constante}$$

où G est la constante de gravitation universelle, et M_{Soleil} représente la masse du soleil.

IV – Mouvement des Satellites

On considère le mouvement d'un satellite de masse m autour de la terre. Dans la suite on va noter M_T la masse de la terre et R_T son rayon. Dans ce cas, la constante k s'écrit : $k = GmM_T$.

Le mouvement du satellite peut être décrit par son énergie mécanique qui est conservée:

$$E_m = -\frac{GmM_T}{r_0} + \frac{1}{2}mV_0^2$$

ou encore

$$E_m = -\frac{k}{2p}[1 - e^2] = -\frac{GmM_T}{2p}[1 - e^2]$$

En fixant les conditions initiales, (*c.à.d.* pour r_0 donné on fixe une vitesse initiale correspondante) on fixe la nature de la trajectoire selon la valeur de l'énergie mécanique obtenue.

IV.1) Première Vitesse Cosmique – Vitesse Circulaire

La trajectoire circulaire du satellite correspond à $e=0$ et $p=r_0$. En utilisant les deux expressions de l'énergie mécanique, on établit la vitesse initiale $V_0=V_C$, appelée *première vitesse cosmique,* permettant d'avoir cette trajectoire :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{r_0} + \frac{1}{2}mV_C^2 = -\frac{GmM_T}{2r_0}$$

$$\boxed{V_C = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$$

Un satellite lancé à une vitesse initiale égale à la première vitesse cosmique, à la distance r_0 du centre de la terre aura une trajectoire circulaire de rayon r_0.

IV.2) Deuxième Vitesse Cosmique – Vitesse de Libération

La vitesse de libération, aussi appelée deuxième vitesse cosmique, correspond à la vitesse initiale minimale nécessaire pour libérer le satellite de l'attraction gravitationnelle de la terre *c.à.d.* permettant au satellite d'avoir une trajectoire ouverte.

La vitesse minimale permettant d'avoir une trajectoire ouverte correspond à la vitesse pour une trajectoire parabolique :

$$e = 1 \Longrightarrow E_m = 0$$

$$E_m = -\frac{GmM_T}{r_0} + \frac{1}{2}mV_L^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}}$$

Par conséquent si la vitesse initiale d'un satellite est supérieure ou égale à sa vitesse de libération sa trajectoire sera ouverte (parabolique ou hyperbolique). Le satellite s'éloignera donc indéfiniment de la terre.

Application :

La trajectoire minimale que peut avoir un satellite correspond à une trajectoire circulaire à altitude négligeable par rapport au rayon de la terre *($r_0 \approx R_T$).* Elle correspond à une première vitesse cosmique:

$$V_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

D'un autre coté, la vitesse de libération est égale à

$$V_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2}V_C$$

Par conséquent pour éviter de perdre un satellite il faut le lancer avec une vitesse initiale V_0 telle que:

$$V_C < V_0 < V_L = \sqrt{2}V_C$$

Application numérique :

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2\ ; \quad M_T = 6 \times 10^{24} kg \quad ; \quad R_T = 6400 km$$

Ceci donne les valeurs numériques suivantes, pour les vitesses cosmiques :

$$V_C = 7{,}9 \times 10^3 m/s = 28{,}5 \times 10^3 km/h \quad ; \quad V_L = 11{,}3 \times 10^3 m/s = 40{,}7 \times 10^3 km/h$$

$$28{,}5 \times 10^3 km/h < V_0 < 40{,}7 \times 10^3 km/h$$

IV.3) Satellites Géostationnaires

Définition :

Un satellite géostationnaire est un satellite qui est fixe pour un référentiel (observateur) lié à la terre. C'est un satellite qui a la même période de rotation que celle de la terre sur elle même, c.à.d. 24h ou bien 86 400 s.

Pour que le satellite ait une vitesse constante, il faut que sa trajectoire soit circulaire (sinon, on a vu que la vitesse dépend de la distance par rapport à la terre on aura donc une vitesse variable), on utilise alors la première vitesse cosmique:

$$V = V_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

Or la vitesse angulaire est donnée par $\omega = \frac{V}{R}$, et la période de rotation par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{R}{V} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

Le rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire doit donc être

$$\boxed{R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Application numérique :

$$G = 6{,}67\times10^{-11} N.m^2/kg^2\ ; \quad M_T = 6\times10^{24} kg \quad ; \quad R_T = 6400 km$$

$$\boxed{R = 42\ 300\ km = 6{,}6\ R_T}$$

Cela correspond à une altitude :

$$\boxed{h = R - R_T \approx 36\ 000\ km}$$

Remarque :

Ne pas confondre un satellite géostationnaire à un satellite géosynchrone. Ce dernier à la même période de rotation que celle de la terre mais il n'est pas fixe par rapport à celle la. Pour un observateur lié à la terre ce satellite revient au même point de l'espace après une période de 24h.